Smarandache 函数的混合均值研究

黄　炜

(宝鸡职业技术学院 基础部,陕西 宝鸡 721013)

摘　要:对于任意的正整数 n,我们用 $S(n)$ 表示 Smarandache 函数,即 $S(n) = \min\{m: n \mid m!, m \in N\}$,文章主要利用初等方法和解析方法,研究 Smarandache 函数 $\Lambda(n)S(n)$、$\Lambda_2(n)S(n)$ 的混合均值性质,获得了两个较强的渐近公式.

关键词:Smarandache 函数; 复合函数; 均值; 渐近公式

中图分类号:O156.4　　文献标志码:A　　文章编号:1009—5128(2011)12—0006—03

收稿日期:2011—04—06

基金项目:国家自然科学基金项目(10671155);陕西省自然科学基金资助项目(SJ08A28)

作者简介:黄炜(1961—),男,陕西岐山人,宝鸡职业技术学院教授,理学硕士. 研究方向:数论及特殊函数.

0　引言与结论

对于任意的正整数 n,著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为:$S(n) = \min\{m: n \mid m!, m \in N\}$,例如:$S(1) = 1$,$S(2) = 2$,$S(3) = 3$,$S(4) = 4$,$S(5) = 5$,$S(6) = 6$,$S(7) = 7$,$S(8) = 4$,$S(9) = 6$,$S(10) = 5$,$L$ 从 $S(n)$ 的定义和性质,很容易推断,对于任意正整数 n,若它的标准素因数分解式是 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$,则有

$$S(n) = \max_{1 \leqslant i \leqslant k}\{S(p_i^{\alpha_i})\} \tag{1}$$

关于 $S(n)$ 的算术性质,有许多学者进行研究[2-5],并得到了许多重要理论价值的成果,文[1]研究了 Smarandache 函数的值分布性质,获得了下面更深刻的结果:

设 $P(n)$ 表示 n 最大素因数,对于任意整数 $x > 1$,我们有渐近公式:

$$\sum_{n \leqslant x} (S(n) - P(n))^2 = \frac{2\zeta(\frac{3}{2}) x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x} + O(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x})$$

这里 $\zeta(s)$ 是黎曼的 $Zeta$ 函数。文献[3]研究了 Smarandache 函数的均值性质,给出了 $S(n)$ 及 $\frac{S(n)}{n}$ 均值的渐近公式

$$\sum_{n \leqslant x} S(n) = \frac{\pi^2 x^2}{12\ln x} + O(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x})$$

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{S(n)}{n} = \frac{\pi^2 x}{6\ln x} + O(\frac{x}{\ln^2 x})$$

在参考文献[2]中,Melvyn 给出了广义 Mangoldt 函数的定义,即 $\Lambda_r(n) = (\mu * L^r)(n) = \sum_{dk=n} \mu(d) \ln^k(n)$,其中 $\mu(d)$ 是 mö bius 函数,"表示 Ditich1et 乘积 $L(n) = \ln n$,$r \geqslant 1$,当 $r = 1$ 时,它即为一般的 Mangoldt 函数.

本文利用初等数学方法研究了 Smarandache 函数 $S(n)$、Mangoldt 函数和广义 Mangoldt 函数的一些新均值公式. 即就是证明了下面的定理:

定理 1　设 k 为任意给定的正整数,对任何 $x > 1$ 的实数,有渐近公式

$$\sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) S(n) = x^2 \sum_{i=0}^{k} \frac{b_i}{\ln^i x} + O(\frac{x}{\ln^k x})$$

其中 $\Lambda(n)$ 是 Mangoldt 函数，$b_i(i=0,1,2,3,\cdots,k)$ 是可计算常数.

定理 2　对任何正整数 $x \geqslant 2$，有渐近公式

$$\sum_{n \leqslant x} \Lambda_2(n) S(n) = x^2 \ln x \sum_{i=0}^{k} \frac{c_i}{\ln^i x} + O\left(\frac{x}{\ln^k x}\right)$$

其中 Λ_2 是 Mangoldt 函数当 $r=2$ 的情形，$c_i(i=0,1,2,3,\cdots,k)$ 是可计算常数.

1　两个引理

为了完成定理的证明，我们需要下面两个引理:

引理 1　对任一实数 $x>1$，Mangoldt 函数的均值是:

$$\sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) = x + O\left(x^{\frac{1}{2}} \ln^2 x\right)$$

在参考文献 [2] 中，这一结果是在 Riemann 猜想成立的前提下得到的，是一个和 Riemann 猜想等价的命题.

引理 2　对任一实数 $x>1$，广义 Mangoldlt 函数 $\Lambda_2(n)$ 的均值是:

$$\sum_{n \leqslant x} \Lambda_2(n) = 2x \ln x + O(x)$$

证明见参考文献 [2].

2　定理的证明

我们现在来完成定理的证明. 首先证明定理 1.

从 $S(n)$ 的定义和性质，很容易推断，对于任意正整数 n，若它的标准素因数分解式是 $n=p_1^{\alpha_i} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$，则有

$$S(n) = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \{S(p_i^{\alpha_i})\} \tag{1}$$

特别地 $S(p^\alpha) = p^\alpha$

由 $\Lambda(n)$ 的定义可得:

$$\sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) S(n) = \sum_{a \leqslant \frac{\ln x}{\ln 2}} \sum_{p \leqslant x^{\frac{1}{a}}} \Lambda(p^a) S(p^a) = \sum_{p \leqslant x} p \ln p + \sum_{2 \leqslant a \leqslant \frac{\ln x}{\ln 2}} \sum_{p \leqslant x^{\frac{1}{a}}} p^a \ln p \tag{2}$$

由引理 1 及 Abel 求和公式以及素数分布定理(参阅文献 [6] 中第三章定理 2):

$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant n} 1 = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i \cdot x}{\ln^i x} + O\left(\frac{x}{\ln^{k+1} x}\right)$$

其中 $a_i(i=1,2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数且 $a_1=1$. 并注意到 $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ 可得

$$\begin{aligned} \sum_{p \leqslant x} p \ln p &= x \ln x \pi(x) - \int_2^x (\ln y + 1) \pi(y) dy \\ &= x \ln x \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i \cdot x}{\ln^i x} + O\left(\frac{x}{ln^{k+1} x}\right)\right) = x^2 \sum_{i=0}^{k} \frac{b_i}{\ln^i x} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $b_i(i=0,1,2,3,\cdots,k)$ 是可计算常数.

另一方面

$$\sum_{2 \leqslant a \leqslant \frac{\ln x}{\ln 2}} \sum_{p \leqslant x^{\frac{1}{a}}} p^a \ln p \leqslant x \ln x \tag{4}$$

结合(1)、(2)及(3)可得

$$\sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) S(n) = x^2 \sum_{i=0}^{k} \frac{b_i}{\ln^i x} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)$$

其中 $b_i(i=0,1,2,3,\cdots,k)$ 是可计算常数.

这就完成了定理 1 的证明.

定理2的证明可以利用定理1的证明方法和引理2的结论证得.

参考文献:

[1] 徐哲峰. 关于Smarandache函数的值分布[J]. 数学学报(中文版),2006,49(5):1009-1012.

[2] Natlmuson Melvyn B. Elementary methods in number theory[M]. Beijing: World Publishing Company, 2003.293.

[3] Wang Y. X.. On the Smaranache function[C]//Zhang Wenpeng. Research on Smaranache Problems in Number Theory Collected papers. America: Hexis,2005.103-106.

[4] 黄炜. 关于正整数的k次方根数列均值[J]. 吉首大学学报(自然科学版),2010,31(4):8-9.

[5] 黄炜,赵教练. 关于Smarandach平方根部分数列a_2(n)和b_2(n)[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2010,27(6):52-54.

[6] 潘承洞,潘承彪. 素数定理的初等证明[M]. 上海:上海科学技术出版社,1988.

【责任编辑 舒尚奇】

The Study of the Mean Value Involving Smarandache Function

HUANG Wei

(Department of Baoji Vocational and Technical College, Baoji 721013, China)

Abstract: For any positive integer n, let $S(n)$ denotes the Smarandache function, that $S(n) = min\{m: n \mid m!, m \in N\}$. In this paper, we use the elementary methods to study the mean value properties of the composite function $\Lambda(n) S(n)$ 、$\Lambda_2(n) S(n)$, and give two sharper asymptotic formula for it.

Key words: Smarandache function; composite function; mean value; asymptotic formula

---

(上接第5页)

至此,我们完成了定理的全部证明.

参考文献:

[1] F. Smarandache. Collected papers Vol. III[M]. Bucharest: Tempus Publ. Hse.,1998.

[2] 徐哲峰. 关于Smarandache幂函数的平均值[J]. 数学学报(中国系列),2006,49(1):77-80.

[3] Tom M. Apostol. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag,1976.

[4] 潘承洞,潘承彪. 初等数论[M]. 北京:北京大学出版社,2003.

【责任编辑 舒尚奇】